

Title	非平衡・量子散逸系の正準理論：量子系確率微分方程式の一貫した枠組み(筑波大学開学20周年記念第2回『非平衡系の統計物理-現状と展望』シンポジウム,研究会報告)
Author(s)	有光, 敏彦
Citation	物性研究 (1994), 62(1): 31-61
Issue Date	1994-04-20
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/95302">http://hdl.handle.net/2433/95302</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

# 非平衡・量子散逸系の正準理論

## ー 量子系確率微分方程式の一貫した枠組み ー

有光 敏彦

筑波大学 物理学系  
〒305 つくば市天王台1-1-1

### 1 はじめに

この講演では、Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics (NETFD) [1]-[4] と名付けられた、非平衡量子系を扱う正準理論を紹介する。これは、散逸量子系を扱う一貫した（非平衡系統計力学でのすべての基本的概念，すなわち，Boltzmann 方程式，Fokker-Planck 方程式，Langevin 方程式，確率 Liouville 方程式\* で代表される見方を，一つの土俵で議論できるという意味で），しかも，量子力学や場の量子論で学んだ，自然認識の基本である演算子代数と表現空間という二重構造を供えた理論体系である。

NETFD の表現空間（熱空間，thermal space，と名付けられた）は，2つの Hilbert 空間の直積で構成されている。1つは **non-tilde** 場，もう1つは **tilde** 場の Hilbert 空間である。NETFD では，いかなる演算子  $A$  にもその随伴演算子（tilde 演算子） $\tilde{A}$  が伴っている。tilde 共役， $\sim$ ，は，

$$(A_1 A_2)^\sim = \tilde{A}_1 \tilde{A}_2, \quad (1)$$

$$(c_1 A_1 + c_2 A_2)^\sim = c_1^* \tilde{A}_1 + c_2^* \tilde{A}_2, \quad (2)$$

$$(\tilde{A})^\sim = A, \quad (3)$$

$$(A^\dagger)^\sim = \tilde{A}^\dagger, \quad (4)$$

で定義される。ただし， $c_1$  や  $c_2$  は， $c$  数である。Schrödinger 表現では，tilde 演算子と non-tilde 演算子は，互いに可換である：

$$[A, \tilde{B}] = 0. \quad (5)$$

散逸は，直積 Hilbert 空間全体での回転，すなわち，tilde 演算子と non-tilde 演算子を交ぜるような回転として捕らえられることが明らかになった。無限小時間発展演算子の中の tilde と non-tilde 場が掛っている項が，散逸（すなわち，非可逆）現象を司っているのである。この点は，NETFD が建設されて初めて認識された [1, 2]。<sup>†</sup>

\*古典系での確率 Liouville 方程式は，久保 [5, 6] により初めて導入された。

<sup>†</sup>この認識は，Gibbs アンサンブルを定式化した熱平衡系の TFD [7] にはなかった。そこには，散逸は現れない。この点が，NETFD と TFD との本質的な違いのひとつである。Zubarev が，NETFD の方法を賞賛し，非平衡量子現象の研究に用い始めたことに，ここで言及させていただきたい [8]。

Boltzmann は、微視的で可逆な Newton 力学から出発して、自然界の非可逆性を導出しようとした。しかし、Boltzmann 方程式を導く際に、分子混沌と呼ばれる確率操作を、知らずに導入していたことが判明したのである（その辺のからくりの簡単な解説は、[9] を参照のこと）。我々の新しい方法が見通しの良いものであるという技術的な面ばかりでなく、散逸量子場の理論としてのその二重構造が、Boltzmann の初め描いた夢を、何等かの意味で実現させるのではないか、という期待が湧いてくる。Boltzmann の時代には、この二重構造は認識されていなかったのである。

詳しい NETFD の解説と参考文献は [4] を参照して頂くとして、semi-free 時間発展演算子（量子 Fokker-Planck 方程式と、定常的量子 Wiener 過程に従う量子確率 Liouville 方程式、それぞれに関するもの）が、いくつかの基本的要請の元に、如何にして創られるかを示す。Semi-free 時間発展演算子は、双線形で大域的ゲージ不変性を満たすものである。以下、散逸量子系の正準理論が、前者の時間発展演算子によって如何に創られるかを紹介し、量子系確率微分方程式の一貫した体系が、如何にして建設されるかを示す（図 2 参照）。そうすると、量子散逸系の方程式に纏わる次のような基本的な疑問が、解決されることが見えてくる（量子系 Langevin 方程式に対する問題提起に関しては、[10] も参照のこと）。

**Q1.** 量子散逸系を扱う正準理論（つまり、時間発展が正準変換で誘起される）は、建設可能だろうか？

考えもなしに

$$a(t) = ae^{-(i\omega+\kappa)t}, \quad a^\dagger(t) = a^\dagger e^{(i\omega-\kappa)t}, \quad (6)$$

のようにエネルギー・スペクトルに虚数部を導入するだけでは、同時刻交換関係は、けっして保存されない：

$$[a(t), a^\dagger(t)] = [a, a^\dagger] e^{-2\kappa t}. \quad (7)$$

**Q2.** 揺動力演算子は KMS 条件 [11, 12] を満たせないので、量子系では白色過程は許されないとされている。たとえば、Langevin 方程式

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega a(t) - \kappa a(t) + f(t), \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt}a^\dagger(t) = i\omega a^\dagger(t) - \kappa a^\dagger(t) + f^\dagger(t), \quad (9)$$

を考えてみよう。ただし、 $\kappa$  は、摩擦係数である。また、 $a(t)$  と  $a^\dagger(t)$  は、それぞれ Hilbert 空間の消滅、生成確率演算子で、 $t=0$  に正準交換関係を満たすものとする：

$$[a(0), a^\dagger(0)] = 1. \quad (10)$$

揺動力演算子  $f(t)$  や  $f^\dagger(t)$  の時間相関は、

$$\langle f(t) \rangle = \langle f^\dagger(t) \rangle = 0, \quad (11)$$

$$\langle f^\dagger(t)f(s) \rangle = 2\kappa\bar{n}\delta(t-s), \quad (12)$$

$$\langle f(t)f^\dagger(s) \rangle = 2\kappa(\bar{n}+1)\delta(t-s), \quad (13)$$

で与えられるとする [13]-[15]。ただし、

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (14)$$

である。ここで、 $\langle \dots \rangle$  の記号は、(11)–(13) で特徴付けられた確率過程に関わる乱雑平均を表す。また、 $\beta$  は、環境の温度  $T$  ( $k_B = 1$ ) の逆数である。確率過程に関する乱雑平均をとると、同時刻交換関係は、その形を保存する：

$$\langle [a(t), a^\dagger(t)] \rangle = 1. \quad (15)$$

さて問題は、相関 (12) や (13) が、KMS 条件 [11, 12]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ik_0 t} \langle\langle f^\dagger(t) f(0) \rangle\rangle = e^{-\beta k_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ik_0 t} \langle\langle f(0) f^\dagger(t) \rangle\rangle, \quad (16)$$

を満たすか、である。左辺は、

$$2\kappa \bar{n} = 2\kappa \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (17)$$

となるが、右辺は、

$$2\kappa(\bar{n} + 1) = 2\kappa \frac{e^{\beta(\omega - k_0)}}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (18)$$

となる。つまり、 $k_0 = \omega$  の場合 (on-mass-shell とみなせるような場合) 以外は、KMS 条件は、相関 (12) や (13) とは相容れないのである。

しかしながら、微視的な観点から減衰理論により導出された量子系マスター方程式 (あるいは、量子系 Fokker-Planck 方程式) [16] があり、それを見ると、量子的白色雑音によって誘起される Langevin 方程式が、必ずや存在するように思えるのである (以下に出てくる (53) や (64) を参照のこと)。はたして、多くの分野で広く使われている量子系マスター方程式は、正しくないのでしょうか？

**Q3.** Langevin 方程式で記述されている系は、少なくとも 2 つの、互いに相互作用している部分系で構成されているはずである。注目している部分系と、揺動力に関わる部分系とである。以下で見るように、確率的 Liouville 方程式は Schrödinger 表現での式であり、一方、Langevin 方程式は Heisenberg 表現での式である。(11)–(13) のような確率過程の規定は、2 つの部分系間相互作用が運動方程式に効いてこない Schrödinger 表現でなされるべきである。それでは、Langevin 方程式に現れる揺動力の相関として、はたして、Schrödinger 表現と同じものを採用して良いのだろうか？

**Q4.** 如何にして、確率過程の表現空間を建設したら良いのだろうか？

時間発展演算子の一般形は、本質的に Liouville 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = -iL\rho(t), \quad (19)$$

に関する次の性質から導きだされた。

**D1.** Liouville 演算子のエルミート性：

$$L^\dagger = L. \quad (20)$$

D2. 確率の保存 ( $\text{tr } \rho = 1$ ):

$$\text{tr } LX = 0. \quad (21)$$

D3. 密度行列のエルミート性:

$$\rho^\dagger(t) = \rho(t). \quad (22)$$

NETFD の体系では、系の時間発展は、Schrödinger 方程式 ( $\hbar = 1$ )

$$\frac{\partial}{\partial t} |0(t)\rangle = -i\hat{H} |0(t)\rangle, \quad (23)$$

で記述される。この Schrödinger 方程式を、しばしば Fokker-Planck 方程式と呼ぶ。従って、Fokker-Planck 方程式は、Schrödinger 表現の式である。上に挙げた Liouville 方程式の各性質に対応して、Schrödinger 方程式は次の性質を持つ。

B1. 無限小時間発展演算子、山付ハミルトニアン (hat-Hamiltonian)  $\hat{H}$ , は,

$$(i\hat{H})^\sim = i\hat{H}, \quad (24)$$

を満たす。この性質は、ティルディアン (tildian) と名付けられた。ティルディアン山付ハミルトニアンは、必ずしもエルミート演算子ではない。

B2. 山付ハミルトニアンは、ブラ熱真空に関して零固有値を持つ:

$$\langle 1 | \hat{H} = 0. \quad (25)$$

これは、確率の保存 ( $\langle 1 | 0(t) \rangle = 1$ ) の顕れである。

B3. 熱真空  $\langle 1 |$  や  $|0\rangle$  は、tilde 不変:

$$\langle 1 |^\sim = \langle 1 |, \quad |0\rangle^\sim = |0\rangle, \quad (26)$$

であり、 $\langle 1 | 0 \rangle = 1$  で規格されている。

## 2 統計力学における基本的な見方

非平衡統計力学における基本的な見方は、表 1 のように、4 つに分類される。分類 I では、分子混沌の仮定や、非可逆性を産み出すそれと同等な過程の元に、一粒子分布関数 (古典統計力学では、 $\mu$ -位相空間) が扱われる。分類 II では、調べている系のアンサンブルの分布を記述する、密度演算子を取り扱われる。古典統計力学の言い方では、 $\Gamma$ -位相空間での代表点の集まりを扱うのである。それぞれの代表点は、アンサンブルの要素系の運動状態を表している。非可逆性は、 $\Gamma$ -空間の粗視化によって導入される。分類 III では、ある確率過程で規定された確率方程式に従って時間発展する、物理量の経路を調べる。揺動力の時間相関によって、系の非可逆性が導入される。分類 IV では、位相空間中の経路の束の分布が扱われる [5, 6]。確率過程の揺動力サンプルに従って、各時刻の位相空間に流れのパターンが現れる。系の運動状態を表す代表点が、時間的にパターンを通過してできる経路は、対応した Langevin 方程式によって規定される経路と、まったく同じものである。

Table 1: 非平衡統計力学における基本的な見方

	創始者	基礎方程式	キーワード
I	Boltzmann	Boltzmann 方程式 運動学的方程式	一粒子分布関数 分子混沌
II	Gibbs	マスター方程式 Fokker-Planck 方程式	密度演算子 アンサンブル
III	Einstein	Langevin 方程式	揺動力 動力学の変数
IV	Kubo	確率的 Liouville 方程式	揺動力 位相空間の変数

### 3 量子力学

#### 3.1 座標表示

簡単に、調和振動子の Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \quad (\hbar = 1), \quad (27)$$

を振り返ってみよう。ハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \quad (28)$$

である。演算子  $\hat{x}$  と  $\hat{p}$  は、正準交換関係

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i, \quad (29)$$

を満たす。

Schrödinger 方程式 (27) は、 $x$ -表現では、

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, t) = H\psi(x, t), \quad (30)$$

となる。波動関数は、

$$\langle x|\psi(t)\rangle = \psi(x, t), \quad (31)$$

で定義され、この表現でのハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} H\delta(x - x') &= \langle x|\hat{H}|x'\rangle \\ &= \left( -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x'^2 \right) \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ここで、 $x$ -表現での行列要素

$$\langle x|\hat{x}|x'\rangle = x\delta(x - x'), \quad \langle x|\hat{p}|x'\rangle = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x - x'), \quad (33)$$

を用いた。

(30) に

$$\psi(x, t) = u(x)e^{-iEt}, \quad (34)$$

を代入して得られる固有値方程式

$$\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) u(x) = Eu(x), \quad (35)$$

は、無次元パラメーター

$$\xi = \sqrt{m\omega}x, \quad \lambda = \frac{2E}{\omega}, \quad (36)$$

を導入して,

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + (\lambda - \xi^2)u = 0, \quad (37)$$

となる。

変換

$$u(\xi) = H(\xi)e^{-\frac{1}{2}\xi^2}, \quad (38)$$

により, (37) は, さらに

$$H'' - 2\xi H' - (\lambda - 1)H = 0, \quad (39)$$

となるが, これを見ると

$$e^{-s^2+2s\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n, \quad (40)$$

や

$$H_n(\xi) = e^{\xi^2} \left(-\frac{d}{d\xi}\right)^n e^{-\xi^2}, \quad (41)$$

で定義されるエルミート多項式を思い出す。エルミート多項式が満たす微分方程式

$$H_n'' - 2\xi H_n' + 2nH_n = 0, \quad (42)$$

と比較すると, エネルギーが

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \omega, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (43)$$

と量子化され, そのエネルギー状態に属する固有関数は,

$$u_n(x) = N_n H_n(\sqrt{m\omega}x) e^{-\frac{1}{2}m\omega x^2}, \quad (44)$$

となることが分かる。固有関数の規格化は,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |u_n(x)|^2 = 1, \quad (45)$$

で定義する。

変数  $x$  は実空間の座標を表しているのではなく, 位相空間のものである。 $|\psi(x, t)|^2 dx$  が, 時刻  $t$  に  $x \sim x + dx$  の範囲に粒子を見出す確率を与えるのである。

### 3.2 占拠数表現

関係式

$$\tilde{x} = \sqrt{\frac{1}{2m\omega}} (a^\dagger + a), \quad \tilde{p} = i\sqrt{\frac{m\omega}{2}} (a^\dagger - a), \quad (46)$$

で消滅・生成演算子  $a, a^\dagger$  を導入すると、良く知られているように、ハミルトニアン (28) は、

$$\tilde{H} = \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \omega, \quad (47)$$

となる。消滅・生成演算子は、同時刻正準交換関係

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad (48)$$

を満たす。

個数演算子  $a^\dagger a$  の固有状態  $|n\rangle$  :

$$a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (49)$$

は、

$$\tilde{H} |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (50)$$

を満たし、従ってエネルギー固有状態でもある。ただし、 $E_n$  は、(43) で与えられる。

状態  $|n\rangle$  は、

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad (51)$$

のように、真空  $|0\rangle$  上に組み立てられる。真空状態は、

$$a|0\rangle = 0, \quad (52)$$

で定義される。

消滅・生成演算子を用いた量子力学の代数的再構成は、技術的な見通しの良さばかりでなく、自然認識の大幅な深まりをもたらし、場の量子論の建設へと進んだ。同様の再構成が、量子統計力学における非平衡量子散逸系に対してもなされたのである。その進展を、4節と5節で見てみよう。

## 4 量子統計力学

### 4.1 量子 Fokker-Planck 方程式

減衰振動子の量子マスター方程式 (あるいは、量子 Fokker-Planck 方程式) は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_S(t) = -i (H_S^\times + i\Pi) \rho_S(t), \quad (53)$$

で与えられる [16]。ただし、記法  $H_S^\times X = [H_S, X]$  を導入した。注目している系のハミルトニアン  $H_S$  は、

$$H_S = \omega a^\dagger a, \quad \omega = \epsilon - \mu, \quad (54)$$



である。ただし、 $\epsilon$ ,  $\mu$ を、それぞれ、一粒子エネルギー、化学ポテンシャルとした。緩和演算子 $\Pi$ は、

$$\Pi X = \kappa \{[aX, a^\dagger] + [a, Xa^\dagger]\} + 2\kappa\bar{n}[a, [X, a^\dagger]], \quad (55)$$

で与えられる。ただし、

$$\kappa = \Re e \, g^2 \int_0^\infty dt \sum_{\mathbf{k}} \langle [R_{\mathbf{k}}(t), R_{\mathbf{k}}^\dagger(0)] \rangle_R e^{i\omega t}, \quad (56)$$

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \quad (57)$$

であり、 $\beta$ は温度の逆数、つまり、 $\beta = 1/T$ 、である。なお、Boltzmann 定数を、温度の単位とした。熱浴の密度演算子 $\rho_R = Z_R^{-1} e^{-\beta H_R}$  ( $Z_R = \text{tr}_R e^{-\beta H_R}$ ) による平均を、 $\langle \cdots \rangle_R = \text{tr}_R \cdots \rho_R$ で示した。結合定数 $g$ は、調和振動子と温度 $T = \beta^{-1}$ の熱浴との相互作用の強さを表わす。

一体分布関数 $n(t) = \text{tr} a^\dagger a \rho_S(t)$ は、Boltzmann 方程式

$$\frac{d}{dt} n(t) = -2\kappa [n(t) - \bar{n}], \quad (58)$$

を満たしていることが分かる。ただし、 $\bar{n}$ は、(57)で定義されたものである。

上記のマスター方程式(53)は、Liouville 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = -iH^\times \rho(t), \quad (59)$$

に減衰理論を適用して、長時間極限の下に熱浴を熱平均してしまうことにより得られる[16]。ただし、ハミルトニアンは、

$$H = H_S + H_R + H_I, \quad (60)$$

である。系と熱浴の相互作用を表わすハミルトニアン $H_I$ は、 $R_{\mathbf{k}}^\dagger$ と $R_{\mathbf{k}}$ を熱浴の演算子として、

$$H_I = g \sum_{\mathbf{k}} (a R_{\mathbf{k}}^\dagger + \text{h.c.}), \quad (61)$$

で与えられる。なお、マスター方程式(53)を導くだけなら、熱浴のハミルトニアン $H_R$ の具体的な表式は必要ない。粗視化された密度演算子 $\rho_S(t)$ は、 $\rho_S(t) = \text{tr}_R \rho(t)$ で定義される。

## 4.2 コヒーレント状態表現

ボソン・コヒーレント状態 $|z\rangle$ ：

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad (62)$$

を用いて、反正規順のボソン・コヒーレント表現[17]-[19]

$$\rho_S(t) = \int \frac{d^2 z}{\pi} f_S(z, t) |z\rangle \langle z|, \quad (63)$$

を導入すると、マスター方程式 (53) を、c 数関数  $f_S(z, t)$  に関する偏微分方程式 [16]

$$\frac{\partial}{\partial t} f_S(z, t) = \left[ -i\omega \left( \frac{\partial}{\partial z^*} z^* - \text{c.c.} \right) + \kappa \left( \frac{\partial}{\partial z^*} z^* + \text{c.c.} \right) + 2\kappa\bar{n} \frac{\partial}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial z} \right] f_S(z, t), \quad (64)$$

へと射影できる。これは、正に Fokker-Planck 方程式である。前述したように、この表式を見ると、量子白色過程が存在するように思える。

変換

$$F(t) = e^{it\omega(\frac{\partial}{\partial z^*} z^* - \frac{\partial}{\partial z} z)} f_S(t), \quad (65)$$

により、Fokker-Planck 方程式 (64) は、

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\xi, t) = 2\kappa \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2} + \bar{n} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) F(\xi, t), \quad (66)$$

となる。ただし、 $\xi = |z|^2$  と置いた。

さらに

$$F(\xi, t) = L(\xi) e^{-\xi} e^{-2\kappa(\lambda+1/2)t}, \quad (67)$$

を代入し、変数を  $\zeta = \xi/\bar{n}$  に変えると、(66) は

$$\zeta L'' + (1 - \zeta) L' + \lambda L = 0, \quad (68)$$

となる。

結局、(66) の解は、初期条件  $F(0) = f_S(0) = e^{-\xi/\bar{n}}/\bar{n}$  の下に

$$F(t) = \frac{1}{n(t)} e^{-\xi/n(t)}, \quad (69)$$

となる。ただし、(69) 中の  $n(t)$  は、Boltzmann 方程式 (58) の解である（初期条件  $n(t=0) = \bar{n}$ ）。解 (69) を出す際に、

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} L_{\ell}(\zeta) x^{\ell} = \frac{1}{1-x} e^{-\zeta \frac{x}{1-x}}, \quad (70)$$

や

$$L_{\ell}(\zeta) = \frac{1}{\ell!} e^{\zeta} \left( -\frac{d}{d\zeta} \zeta \frac{d}{d\zeta} \right)^{\ell} e^{-\zeta}. \quad (71)$$

で定義される Laguerre 多項式を用いた。Laguerre 多項式  $L_{\ell}$  は、微分方程式

$$\zeta L_{\ell}'' + (1 - \zeta) L_{\ell}' + \ell L_{\ell} = 0, \quad (72)$$

を満たし、従って、 $\lambda = \ell$  であることが分かる。

解 (69) を (65) に代入し、得られた  $f_S(t)$  を (63) に用いると、最終的に

$$\rho_S(t) = \frac{1}{n(t)} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-|z|^2/n(t)} |z\rangle \langle z|, \quad (73)$$

を得る。

コヒーレント表現によって量子統計力学を扱うことは、量子力学で座標表示の Schrödinger 方程式を扱うことに対応していると考えられる (小節 3.1 参照)。そこで疑問になるのは、「量子力学での生成・消滅演算子による取り扱いと同様な正準演算子理論が、はたして量子統計力学の場合も可能だろうか？」というものである (小節 3.2 参照)。次節で見るように、その答えは、「可。」である。

## 5 Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics

### 5.1 減衰振動子に対する「Schrödinger 方程式」

基本事項 (24)–(26) と終状態の情報より, 減衰振動子に対する Schrödinger 方程式 (NETFD での) [20]

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -i\hat{H}|0(t)\rangle, \quad (74)$$

が得られる。山付ハミルトニアンは,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \omega (a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) - i\kappa [(1 + 2\bar{n}) (a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) - 2(1 + \bar{n}) a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger] - i2\kappa\bar{n} \\ &= (\omega - i\kappa) \bar{a}^\mu a^\mu - i2\kappa\bar{a}^\mu \bar{n}^{\mu\nu} a^\nu + \omega + i\kappa, \end{aligned} \quad (75)$$

で与えられる。ただし, 熱的二重項  $a^{\mu=1} = a$ ,  $a^{\mu=2} = \tilde{a}^\dagger$ ,  $\bar{a}^{\mu=1} = a^\dagger$ ,  $\bar{a}^{\mu=2} = -\tilde{a}$ , と行列

$$\bar{n}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \bar{n} & -\bar{n} \\ 1 + \bar{n} & -(1 + \bar{n}) \end{pmatrix}, \quad (76)$$

を導入した。ケット熱真空の初期状態  $|0\rangle = |0(0)\rangle$  は,

$$a|0\rangle = f\tilde{a}^\dagger|0\rangle, \quad (77)$$

で規定される。ただし,  $f = n/(1 + n)$ ,  $n = n(0)$  である。なお, 2 種類の演算子を導入すれば, Liouville 方程式が Schrödinger 方程式として扱えることは, Crawford[21] によって初めて示された。

演算子  $a$ ,  $\tilde{a}^\dagger$  等は, 正準交換関係:

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1, \quad (78)$$

を満たす。tilde と non-tilde 演算子は, 互いに可換である。

Fokker-Planck 方程式 (74) は, マスター方程式 (53) を対応原理 [22, 1, 2]:

$$\rho_S(t) \longleftrightarrow |0(t)\rangle, \quad (79)$$

$$A_1 \rho_S(t) A_2 \longleftrightarrow A_1 \tilde{A}_2^\dagger |0(t)\rangle, \quad (80)$$

によって書き換えることにより, 初めて導入された [1, 2]。

### 5.2 消滅・生成演算子

消滅・生成演算子  $\gamma^{\mu=1} = \gamma_t$ ,  $\gamma^{\mu=2} = \tilde{\gamma}^\dagger$  や  $\bar{\gamma}^{\mu=1} = \gamma^\dagger$ ,  $\bar{\gamma}^{\mu=2} = -\tilde{\gamma}_t$  を

$$\gamma_t^\mu = B(t)^{\mu\nu} a^\nu, \quad \bar{\gamma}_t^\mu = \bar{a}^\nu B^{-1}(t)^{\nu\mu}, \quad (81)$$

で導入しよう。ただし, 時間依存 Bogoliubov 変換:

$$B(t)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 + n(t) & -n(t) \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (82)$$

を用いた。消滅・生成演算子は、真空を消す：

$$\gamma_t|0(t)\rangle = 0, \quad \langle 1|\tilde{\gamma}^\dagger = 0. \quad (83)$$

山付ハミルトニアン (75) を消滅・生成演算子で表すと

$$\hat{H} = \omega (\gamma^\dagger \gamma_t - \tilde{\gamma}^\dagger \tilde{\gamma}_t) - i\kappa (\gamma^\dagger \gamma_t + \tilde{\gamma}^\dagger \tilde{\gamma}_t + 2[n(t) - \bar{n}] \gamma^\dagger \tilde{\gamma}^\dagger), \quad (84)$$

となる。これを見ると、Fokker-Planck 方程式 (74) の解が、

$$|0(t)\rangle = \exp \left[ [n(t) - n(0)] \gamma^\dagger \tilde{\gamma}^\dagger \right] |0\rangle, \quad (85)$$

となることが分る。この解は、(73) で与えられる粗視化された密度演算子  $\rho_S(t)$  と同じ情報を有する。なお、(85) を導く際に、Boltzmann 方程式 (58) を用いた。

魅力的な表式 (85) は、[23] で初めて示されたものであるが、これにより、散逸の自発的発生 [24, 25] という新しい概念へと導かれた。この表式が演算子代数だけによって得ることができたことは、特筆に値する。量子力学のものとたいへん似か寄った NETFD の演算子代数のおかげで、平衡状態から遠く外れた非平衡開放系を、今までよりも簡単で見通しよく扱えるようになったのである（たとえば、[26] を見よ。応用に関する文献は、[4] も参照のこと）。

### 5.3 相互作用表現

相互作用表現の演算子は、

$$a(t) = \hat{S}^{-1}(t) a \hat{S}(t), \quad \tilde{a}^\dagger(t) = \hat{S}^{-1}(t) \tilde{a}^\dagger \hat{S}(t), \quad (86)$$

で定義される。ただし、

$$\frac{d}{dt} \hat{S}(t) = -i\hat{H} \hat{S}(t), \quad (i\hat{H})^\sim = i\hat{H}, \quad (87)$$

( $\hat{S}(0) = 1$ ) である。Semi-free 演算子は、

$$\langle 1|a^\dagger(t) = \langle 1|\tilde{a}(t), \quad a(t)|0\rangle = \frac{n(t)}{1+n(t)} \tilde{a}^\dagger(t)|0\rangle, \quad (88)$$

を満たす。Semi-free の山付ハミルトニアン  $\hat{H}$  は必ずしもエルミートではないので、エルミート共役†と区別するために、記号  $\ddagger$  を導入した。しかし、混同の恐れが無い限り、以下では  $\ddagger$  の代りに†を用いることにする。

消滅・生成演算子  $\gamma(t)^{\mu=1} = \gamma(t)$ ,  $\gamma(t)^{\mu=2} = \tilde{\gamma}^\dagger(t)$  や  $\tilde{\gamma}(t)^{\mu=1} = \gamma^\dagger(t)$ ,  $\tilde{\gamma}(t)^{\mu=2} = -\tilde{\gamma}(t)$  は、

$$\gamma(t)^\mu = \hat{S}^{-1}(t) \gamma^\mu \hat{S}(t) = B(t)^{\mu\nu} a(t)^\nu, \quad (89)$$

$$\tilde{\gamma}(t)^\mu = \hat{S}^{-1}(t) \tilde{\gamma}^\mu \hat{S}(t) = \tilde{a}(t)^\nu B^{-1}(t)^{\nu\mu}, \quad (90)$$

で定義される。これらは、性質

$$\gamma(t)|0\rangle = 0, \quad \langle 1|\tilde{\gamma}^\dagger(t) = 0, \quad (91)$$

を有する。

2点関数  $G(t, t')^{\mu\nu}$  は、演算子代数の手続きのみで

$$\begin{aligned} G(t, t')^{\mu\nu} &= -i\langle 1|T[a(t)^\mu \bar{a}(t')^\nu]|0\rangle \\ &= [B^{-1}(t)\mathcal{G}(t, t')B(t')]^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (92)$$

となることが分る。ただし、

$$\mathcal{G}(t, t')^{\mu\nu} = -i\langle 1|T[\gamma(t)^\mu \bar{\gamma}(t')^\nu]|0\rangle = \begin{pmatrix} G^R(t, t') & 0 \\ 0 & G^A(t, t') \end{pmatrix}, \quad (93)$$

$$G^R(t, t') = -i\theta(t - t')e^{(-i\omega - \kappa)(t - t')}, \quad (94)$$

$$G^A(t, t') = i\theta(t' - t)e^{(-i\omega + \kappa)(t - t')}, \quad (95)$$

である。

NETFD の表現空間 (熱空間) は、 $\langle 1|$  に  $\gamma(t)$  や  $\bar{\gamma}(t)$  を順次作用して作られるブラ状態と、 $|0\rangle$  に  $\gamma^\dagger(t)$  や  $\bar{\gamma}^\dagger(t)$  を順次作用して得られるケット状態で張られるベクトル空間である。

正規順は、消滅・生成演算子で導入される。つまり、 $\gamma^\dagger(t)$ ,  $\bar{\gamma}^\dagger(t)$  が、 $\gamma(t)$ ,  $\bar{\gamma}(t)$  の左側に来るのである。物理量演算子を正規順に書き直す過程で Wick 型の公式を得、それによって、繰込まれた相互作用表現の多点関数に対する Feynman 型図形が得られる。Feynman 型図形の内線は、非摂動 2 点関数 (92) である。

## 5.4 Heisenberg 運動方程式

粗視化された演算子  $A(t) = \hat{S}^{-1}(t)A\hat{S}(t)$  に対する Heisenberg 運動方程式は、

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[\hat{H}(t), A(t)], \quad (96)$$

で与えられる。ただし、

$$\hat{H}(t) = \hat{S}^{-1}(t)\hat{H}\hat{S}(t), \quad (97)$$

である。ここで、粗視化された演算子に対する Heisenberg 運動方程式 (96) の存在が、NETFD の特筆すべき特徴の一つであることを強調しておきたい。このお陰で、量子散逸場の正準理論の建設が可能となったのである。そこでは、粗視化された Heisenberg 演算子  $a(t)$  などが、同時刻正準交換関係

$$[a(t), a^\dagger(t)] = 1, \quad [\bar{a}(t), \bar{a}^\dagger(t)] = 1, \quad (98)$$

を満たす。減衰振動子の場合は、

$$\frac{d}{dt}a(t) = -i\omega a(t) - \kappa[(1 + 2\bar{n})a(t) - 2\bar{n}\bar{a}^\dagger(t)], \quad (99)$$

$$\frac{d}{dt}a^\dagger(t) = i\omega a^\dagger(t) + \kappa[(1 + 2\bar{n})a^\dagger(t) - 2(1 + \bar{n})\bar{a}(t)], \quad (100)$$

となる。これを見ると、 $a^\dagger(t)$  の運動方程式が、 $a(t)$  のエルミート共役になっていないことが分る。

## 5.5 山付ハミルトニアンに対角化

山付ハミルトニアン (75) は,

$$\hat{H} = \omega (d^\dagger d - \tilde{d}^\dagger \tilde{d}) - i\kappa (d^\dagger d + \tilde{d}^\dagger \tilde{d}), \quad (101)$$

と記すこともできる。ただし,  $d^{\mu=1} = d$ ,  $d^{\mu=2} = \tilde{d}^\dagger$  や  $\tilde{d}^{\mu=1} = d^\dagger$ ,  $\tilde{d}^{\mu=2} = -\tilde{d}$  は,

$$d^\mu = Q^{-1\mu\nu} a^\nu, \quad \tilde{d}^\mu = \bar{a}^\nu Q^{\nu\mu}, \quad (102)$$

$$Q^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \bar{n} \\ 1 & 1 + \bar{n} \end{pmatrix}, \quad (103)$$

で定義した。初期条件 (77) は,  $d$  や  $\tilde{d}^\dagger$  を用いると,

$$d|0\rangle = (n - \bar{n}) \tilde{d}^\dagger|0\rangle, \quad (104)$$

となる。

対角化された  $\hat{H}$  の表式 (101) を見ると,

$$d(t) = \hat{S}^{-1}(t) d \hat{S}(t) = d e^{-(i\omega + \kappa)t}, \quad \tilde{d}^\dagger(t) = \hat{S}^{-1}(t) \tilde{d}^\dagger \hat{S}(t) = \tilde{d}^\dagger e^{-(i\omega - \kappa)t}, \quad (105)$$

となることが容易にわかる。一方, 消滅・生成演算子が (83) を満たすので, 正規順で書かれた  $\hat{H}$  の表式 (84) からは,  $\langle 1|\hat{H} = 0$  が直ちに見て採れる。 $\hat{H}$  を対角化する演算子と, 正規順の形に書くときの演算子が異なるが, これは NETFD が通常の量子力学や場の量子論と違った体系であることを示している。つまり, 山付ハミルトニアンが, 非可逆過程の時間発展を記述する演算子であることの現れである。

## 5.6 非可逆性

ここで, 考えている系の非可逆性を調べてみよう。この系のエントロピーは,

$$S(t) = -\{n(t) \ln n(t) - [1 + n(t)] \ln [1 + n(t)]\}, \quad (106)$$

で与えられ, 熱の出入りは,

$$d'Q = \omega dn, \quad (107)$$

で与えられる。熱力学が教えるところによると,

$$dS = dS_e + dS_i, \quad dS_e = d'Q/T_R, \quad (108)$$

$$dS_i \geq 0, \quad (109)$$

である。二つ目の式 (109) は, 熱力学の第 2 法則である。式 (106) と (107) を用いて (108) 中の  $dS$  や  $dS_e$  を計算すると, エントロピー生成率に対する関係式 [9]

$$\frac{dS_i}{dt} = \frac{dS}{dt} - \frac{dS_e}{dt} = 2\kappa [n(t) - \bar{n}] \ln \frac{n(t)[1 + \bar{n}]}{\bar{n}[1 + n(t)]} \geq 0, \quad (110)$$

を得る。第 2 の等号の右側の表式が, 最後の不等式を満たすことは容易に確かめられる。これは, (109) と矛盾しない。なお, 等号は, 熱平衡状態  $n(t) = \bar{n}$  か, 準静的過程  $\kappa \rightarrow 0$  の場合に成立する。

## 5.7 コメント

量子力学における調和振動子の演算子代数と Hermite 多項式との関係は、NETFD における減衰振動子の演算子代数と Laguerre 多項式との関係にたいへん似通っていることは、注目に値する。

## 6 量子系の確率 Liouville 方程式

### 6.1 確率的 Semi-Free ハミルトニアン

伊藤型確率 Liouville 方程式に現れる確率的 semi-free 山付ハミルトニアン  $\hat{\mathcal{H}}_{f,t}$  と揺動力演算子の相関は、次の基礎的な要請の元に導き出される：

A1. 確率 semi-free 演算子は、

$$a(t) = \hat{S}_f^{-1}(t) a \hat{S}_f(t), \quad \bar{a}^\dagger(t) = \hat{S}_f^{-1}(t) \bar{a}^\dagger \hat{S}_f(t), \quad (111)$$

で定義される。ただし、

$$d\hat{S}_f(t) = -i\hat{\mathcal{H}}_{f,t} dt \hat{S}_f(t), \quad (112)$$

( $\hat{S}_f(0) = 1$ ) である。なお、注目している系と揺動力  $dF(t)$  等 (A3 で定義される<sup>†</sup>) の源である系は、 $t = 0$  で相互作用をし始めると仮定している。Schrödinger 表現の確率演算子  $a, a^\dagger, \bar{a}$  や  $\bar{a}^\dagger$  は、正準交換関係：

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [\bar{a}, \bar{a}^\dagger] = 1, \quad (113)$$

を満たす。確率 semi-free 演算子 (111) は、同時刻正準交換関係：

$$[a(t), a^\dagger(t)] = 1, \quad [\bar{a}(t), \bar{a}^\dagger(t)] = 1, \quad (114)$$

を保存する。 $\hat{\mathcal{H}}_{f,t} dt$  のテイルディアン性は、semi-free 演算子の定義 (111) と矛盾しない。テイルディアンの山付ハミルトニアン  $\hat{\mathcal{H}}_{f,t} dt$  は必ずしもエルミートではないので、エルミート共役<sup>†</sup>と区別するために記号  $\dagger$  を導入した。しかしながら、混乱の恐れのない限り  $\dagger$  の代りに  $\bar{\phantom{x}}$  を用いることにする。ここで、確率 semi-free 演算子と粗視化された演算子に同じ記号  $a(t)$  等を用いているが、混乱は起こらないと思う。

A2. 確率 semi-free 演算子は：

$$\langle 1 | a^\dagger(t) = \langle 1 | \bar{a}(t), \quad (115)$$

を満たす。

A3. 揺動力演算子  $dF(t)$  等は、定常量子 Wiener 過程である。その 1 次と 2 次のキュムラントは、c 数 (実数) で与えられる：

$$\langle dF(t) \rangle = \langle dF^\dagger(t) \rangle = 0, \quad (116)$$

$$\langle dF(t) dF(t) \rangle = \langle dF^\dagger(t) dF^\dagger(t) \rangle = 0, \quad (117)$$

$$\langle dF^\dagger(t) dF(s) \rangle = 2\kappa \bar{n} \delta(t-s) dt ds, \quad (118)$$

$$\langle dF(t) dF^\dagger(s) \rangle = 2\kappa (\bar{n} + 1) \delta(t-s) dt ds. \quad (119)$$

<sup>†</sup>ここでの定式化では、揺動力演算子  $dF(t)$  や  $dF^\dagger(t)$  が、注目系の Schrödinger 表現のあらゆる演算子  $A$  と可換であることを仮定している： $[A, dF(t)] = [A, dF^\dagger(t)] = 0$

ただし,  $\langle \dots \rangle = \langle | \dots | \rangle$  は, 揺動力演算子  $dF(t)$  に関する乱雑平均を表す。

A4. 揺動力演算子は,

$$\langle | dF^\dagger(t) = \langle | d\tilde{F}(t), \quad (120)$$

を満たす。

A5. 確率 semi-free 演算子と揺動力演算子は, 直交性:

$$\langle a(t) d\mathcal{F}^\dagger(t) \rangle = 0, \quad \text{etc.}, \quad (121)$$

を満たす。ただし, Heisenberg 表現<sup>§</sup> の揺動力演算子  $d\mathcal{F}^\dagger(t)$  は,

$$d\mathcal{F}^\dagger(t) = \hat{S}_f^{-1}(t) dF^\dagger(t) \hat{S}_f(t), \quad (122)$$

で定義される。

## 6.2 確率 Liouville 方程式の表式

### 6.2.1 伊藤型

伊藤型の量子確率 Liouville 方程式は,

$$d|0_f(t)\rangle = -i\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt |0_f(t)\rangle, \quad (123)$$

で与えられる。確率的 semi-free 山付ハミルトニアンは,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt &= \hat{H}_Sdt - i\kappa \left[ (a^\dagger - \bar{a})(\mu a + \nu \bar{a}^\dagger) + \text{t.c.} \right] dt \\ &\quad + i2\kappa(\bar{n} + \nu)(a^\dagger - \bar{a})(\bar{a}^\dagger - a) \\ &\quad + i \left[ (a^\dagger - \bar{a})dW(t) + \text{t.c.} \right], \end{aligned} \quad (124)$$

で [27, 4],  $\hat{H}_S = H_S - \tilde{H}_S$ ,  $H_S = \omega a^\dagger a$ ,<sup>¶</sup> である。また,

$$\langle dW(t) \rangle = \langle d\tilde{W}(t) \rangle = 0, \quad (125)$$

$$\langle dW(t)dW(s) \rangle = \langle d\tilde{W}(t)d\tilde{W}(s) \rangle = 0, \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \langle dW(t)d\tilde{W}(s) \rangle &= \langle d\tilde{W}(s)dW(t) \rangle \\ &= \mu \langle dF^\dagger(s)dF(t) \rangle + \nu \langle dF(t)dF^\dagger(s) \rangle \end{aligned} \quad (127)$$

$$= 2\kappa(\bar{n} + \nu) \delta(t-s) dt ds, \quad (128)$$

であるが, 揺動力演算子  $dW(t)$  は,

$$dW(t) = \mu dF(t) + \nu d\tilde{F}^\dagger(t), \quad (129)$$

<sup>§</sup>山付ハミルトニアンに非線形項が含まれ摂動計算をする場合も考慮すると, これは相互作用表現といった方が適切であろう。この講演では双線形の場合だけを扱うので, この表現を Heisenberg 表現と呼ぶことにする。

<sup>¶</sup>以下の体系は,  $H_S$  が非線形項を含む場合にも適用される。



$(\mu + \nu = 1)$  で定義されるものである。Semi-free 山付ハミルトニアンは,  $a, a^\dagger, dF(t), dF^\dagger(t)$  とこれらの tilde 共役に関して双線形で, 位相変換  $a \rightarrow ae^{i\theta}$  および  $dF(t) \rightarrow dF(t) e^{i\theta}$  に関して不変であるが, その一般形 (124) は, 前小節の基礎的要請によって規定される [4]。ここでの確率過程は, 定常 Gaussian 白色過程である。

一粒子分布関数  $n(t) = \langle\langle 1|a^\dagger(t)a(t)|0_f \rangle\rangle$ , は, Boltzmann 方程式 (58) に従う。 $\langle\langle \dots \rangle\rangle = \langle\langle 1|\dots|0_f \rangle\rangle$  は, 真空期待値と揺動力に関する平均との両方を探ることを表している。

### 6.2.2 Stratonovich 型

Stratonovich 型の確率 Liouville 方程式 [28]

$$d|0_f(t)\rangle = -i\hat{H}_{f,t}dt \circ |0_f(t)\rangle, \quad (130)$$

に現れる semi-free 山付ハミルトニアン  $\hat{H}_{f,t}dt$  は,

$$\hat{H}_{f,t}dt = \hat{H}_Sdt + [(a^\dagger - \tilde{a}) \{id(\mu a + \nu \tilde{a}^\dagger) + [\hat{H}_S, \mu a + \nu \tilde{a}^\dagger]dt\} - \text{t.c.}], \quad (131)$$

$$= \hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt + i(a^\dagger - \tilde{a})(\tilde{a}^\dagger - a)dW(t)d\tilde{W}(t), \quad (132)$$

で与えられる。ただし, 流れ演算子  $da$  や  $d\tilde{a}^\dagger$  は,

$$da = i[\hat{H}_S, a]dt - \kappa[(\mu - \nu)a + 2\nu\tilde{a}^\dagger]dt + dW(t), \quad (133)$$

$$d\tilde{a}^\dagger = i[\hat{H}_S, \tilde{a}^\dagger]dt - \kappa[2\mu a - (\mu - \nu)\tilde{a}^\dagger]dt + dW(t), \quad (134)$$

で規定される<sup>||</sup>。記号  $\circ$  は, Stratonovich 型の掛け算 (Stratonovich 積) を表す。

### 6.3 量子 Fokker-Planck 方程式との関係

伊藤型確率 Liouville 方程式 (123) の乱雑平均をとると, 対応した Fokker-Planck 方程式 (74) [1, 2, 4]:

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -i\hat{H}|0(t)\rangle, \quad (135)$$

を得る。ただし,  $\hat{H}dt = \langle\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt\rangle$  は, (75) で定義され,  $|0(t)\rangle = \langle|0_f(t)\rangle\rangle$  である。ここで, 伊藤積の性質:  $\langle dW(t)\hat{S}_f(t)\rangle = 0$ , etc. を用いた。

Fokker-Planck 方程式 (135) は, Stratonovich 型確率 Liouville 方程式 (130) の乱雑平均をとることによっても得られる。

伊藤型の山付ハミルトニアン (124) は,

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt = \hat{H}_{f,t}dt + i(a^\dagger - \tilde{a})(\tilde{a}^\dagger - a)dW(t)d\tilde{W}(t) \quad (136)$$

$$= \hat{H}dt + i\{(a^\dagger - \tilde{a})dW(t) + \text{t.c.}\}, \quad (137)$$

と表現することもできる。

<sup>||</sup>流れ方程式 (133) と (134) は,  $d(\mu a + \nu \tilde{a}^\dagger) = i[\hat{H}_S, \mu a + \nu \tilde{a}^\dagger]dt - \kappa(\mu a + \nu \tilde{a}^\dagger)dt + dW(t)$ ,  $d(a - \tilde{a}^\dagger) = i[\hat{H}_S, a - \tilde{a}^\dagger]dt + \kappa(a - \tilde{a}^\dagger)dt$ , と書ける。

## 7 量子 Langevin 方程式

### 7.1 量子 Langevin 方程式の表式

#### 7.1.1 Stratonovich 型

演算子  $A(t) = \hat{S}_f^{-1}(t) A \hat{S}_f(t)$  に対する Stratonovich 型量子 Langevin 方程式は, Heisenberg 運動方程式 [28]:

$$dA(t) = i[\hat{H}_f(t)dt; A(t)] \quad (138)$$

$$\begin{aligned} &= i[\hat{H}_S(t), A(t)]dt + \kappa \left\{ [(a^\dagger(t) - \bar{a}(t)) (\mu a(t) + \nu \bar{a}^\dagger(t)), A(t)] \right. \\ &\quad \left. + [(\bar{a}^\dagger(t) - a(t)) (\mu \bar{a}(t) + \nu a^\dagger(t)), A(t)] \right\} dt \\ &\quad - \left\{ [a^\dagger(t) - \bar{a}(t), A(t)] \circ dW(t) + [\bar{a}^\dagger(t) - a(t), A(t)] \circ d\bar{W}(t) \right\}, \quad (139) \end{aligned}$$

として与えられる。ただし,

$$\hat{H}_f(t) = \hat{S}_f^{-1}(t) \hat{H}_{f,t} \hat{S}_f(t), \quad \hat{H}_S(t) = \hat{S}_f^{-1}(t) \hat{H}_S \hat{S}_f(t) \quad (140)$$

$$[X(t); Y(t)] = X(t) \circ Y(t) - Y(t) \circ X(t), \quad (141)$$

( $X(t)$ ,  $Y(t)$  は, 任意の演算子) であり,

$$\hat{S}_f^{-1}(t) dW(t) \hat{S}_f(t) = dW(t), \quad (142)$$

を用いた。後者の性質は, (132), (124) から分るように,  $\hat{S}_f(t)$  には  $dW$  と  $d\bar{W}$  しか現れないので, 揺動力演算子  $dW(t)$  が  $\hat{S}_f(t)$  と可換であることによる。

(139) を用いると, 注目系の任意の演算子  $A$  と  $B$  に対して

$$d[A(t)B(t)] = dA(t) \circ B(t) + A(t) \circ dB(t), \quad (143)$$

の成立することが直ちに分る [29]。このことより, 量子確率微分方程式 (139) が, 確かに Stratonovich 型であることが分る。

#### 7.1.2 伊藤型

伊藤積と Stratonovich 積の変換公式を利用すると, Stratonovich 型の量子 Langevin 方程式 (139) より伊藤型のものを導き出すことができる [28]:

$$\begin{aligned} dA(t) &= i[\hat{H}_f(t)dt, A(t)] + \left\{ (a^\dagger(t) - \bar{a}(t)) [\bar{a}^\dagger(t) - a(t), A(t)] \right. \\ &\quad \left. + (\bar{a}^\dagger(t) - a(t)) [a^\dagger(t) - \bar{a}(t), A(t)] \right\} dW(t) d\bar{W}(t) \quad (144) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= i[\hat{H}_S(t), A(t)]dt + \kappa \left\{ [(a^\dagger(t) - \bar{a}(t)) (\mu a(t) + \nu \bar{a}^\dagger(t)), A(t)] \right. \\ &\quad \left. + [(\bar{a}^\dagger(t) - a(t)) (\mu \bar{a}(t) + \nu a^\dagger(t)), A(t)] \right\} dt \\ &\quad + 2\kappa(\bar{n} + \nu) [\bar{a}^\dagger(t) - a(t), [a^\dagger(t) - \bar{a}(t), A(t)]]dt \\ &\quad - \left\{ [a^\dagger(t) - \bar{a}(t), A(t)] dW(t) + [\bar{a}^\dagger(t) - a(t), A(t)] d\bar{W}(t) \right\}. \quad (145) \end{aligned}$$

ただし,  $\hat{\mathcal{H}}_f(t)dt = \hat{S}_f^{-1}(t)\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt\hat{S}_f(t)$  である。(145)を用いて, 伊藤型の微分規則

$$d[A(t)B(t)] = dA(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot dB(t) + dA(t)dB(t), \quad (146)$$

が, 任意の注目系の確率演算子  $A$  と  $B$  に対して成立することが分る [30]。このことによって, 量子確率微分方程式 (145) が, 確かに伊藤型であることが分る。さらに, (145) が注目系の任意の確率演算子  $A(t)$  の時間発展方程式であるので, これは, 量子系における伊藤公式である。

$A$  として  $a$ ,  $\tilde{a}^\dagger$  を代入すると, (139), (145) は,

$$da(t) = i[\hat{H}_S(t), a(t)]dt - \kappa[(\mu - \nu)a(t) + 2\nu\tilde{a}^\dagger(t)]dt + dW(t), \quad (147)$$

$$d\tilde{a}^\dagger(t) = i[\hat{H}_S(t), \tilde{a}^\dagger(t)]dt - \kappa[2\mu a(t) - (\mu - \nu)\tilde{a}^\dagger(t)]dt + dW(t), \quad (148)$$

となる。これらは, それぞれ, 流れ (133), (134) と形式的に同じ構造をしている。

Langevin 方程式による取扱いでは, 系の時間発展は, 揺動力の相関が与えられたときに特定される。ところで, 量子 Langevin 方程式は Heisenberg 表現での式であり, 従って, 揺動力の規定もこの表現で行うべきである。しかしながら, 揺動力  $dF(t)$  等は,  $\hat{H}_f(t)$  の影響で確率過程の情報が覆い隠されているので, 揺動力の規定をこれらの演算子で行うことはできない。一方, (142) のお陰で,  $dW(t)$  等の相関を与えると, 確率過程の規定ができるのである。これによって, 疑問 Q3 が解決した。式 (128) を見ると分るように, 量子 Langevin 方程式 (139) や (145) には, 可換な組  $dW(t)$  と  $d\tilde{W}(t)$  しか現れていないことに注目せよ。可換な演算子 ((128) を見よ) では, 疑問 Q2 は意味がないので, これは, 問題にはならなくなったのである。

## 7.2 期待値の運動方程式

揺動力に関するブラ真空  $\langle |$  と注目系に関するブラ真空  $\langle 1|$  を左側から (145) に作用すると, ブラ・ベクトル状態  $\langle 1|A(t)$  に関する伊藤型の確率微分方程式:

$$\begin{aligned} d\langle 1|A(t) = & i\langle 1|[H_S(t), A(t)]dt - \kappa \left\{ \langle 1|[A(t), \tilde{a}^\dagger(t)]a(t) + \langle 1|\tilde{a}^\dagger(t)[a(t), A(t)] \right\} dt \\ & + 2\kappa\bar{n}\langle 1|[a(t), [A(t), \tilde{a}^\dagger(t)]]dt \\ & + \langle 1|[A(t), \tilde{a}^\dagger(t)]dF(t) + \langle 1|[a(t), A(t)]dF^\dagger(t), \end{aligned} \quad (149)$$

を得る。ここで,  $\langle |dW(t) = \langle |dF(t)$  や  $\langle |d\tilde{W}(t) = \langle |dF^\dagger(t)$  を用いた。ブラ・ベクトル状態に対するこの運動方程式は, Gardiner と Collett [31] により与えられた量子 Langevin 方程式と密接に関係しているはずである。

揺動力ケット真空  $| \rangle$  とケット真空  $|0\rangle$  を (149) の右側から作用させると, 注目系の任意の演算子  $A(t)$  の平均値に対する運動方程式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle A(t) \rangle = & i\langle [H_S(t), A(t)] \rangle + \kappa \left( \langle [\tilde{a}^\dagger(t)[A(t), a(t)]] \rangle + \langle [\tilde{a}^\dagger(t), A(t)]a(t) \rangle \right) \\ & + 2\kappa\bar{n}\langle [\tilde{a}^\dagger(t), [A(t), a(t)]] \rangle, \end{aligned} \quad (150)$$

が得られる。これは, 熱浴と線形・散逸的結合をしている系の正確な運動方程式であり, Fokker-Planck 方程式 (135) を利用しても得られる。ここで, 伊藤積の性質 [30]  $\langle a(t)dW(t) \rangle = 0$ , etc., を用いた。なお, 運動方程式 (150) は, 非線形相互作用のある一般の  $\hat{H}_S$  について導かれたものである。

## 8 NETFD におけるコヒーレント状態表現

一般化されたコヒーレント状態表現を用いて、NETFD における位相空間法を導入する [32]。

1.  $|0_f(t)\rangle$  に対応する確率分布関数  $P_f^{(\mu,\nu)}(z,t)$  は,

$$|0_f(t)\rangle = \int_z P_f^{(\mu,\nu)}(z,t) |\Delta^{(\mu,\nu)}(z)\rangle, \quad (151)$$

で定義される。ただし,

$$|\Delta^{(\mu,\nu)}(z)\rangle = \int_\alpha e^{s|\alpha|^2/2} e^{z\alpha^* - z^*\alpha} |D(\alpha)\rangle, \quad (152)$$

であり,  $|D(\alpha)\rangle$  は,

$$(a - \tilde{a}^\dagger)|D(z)\rangle = z|D(z)\rangle, \quad (\mu a + \nu \tilde{a}^\dagger)|D(z)\rangle = -\partial_*|D(z)\rangle, \quad (153)$$

と

$$\langle 1|D(z)\rangle = \pi\delta^{(2)}(z), \quad \delta^{(2)}(z) = \delta(\Re z)\delta(\Im z), \quad (154)$$

で規定される。ここで, 省略表記  $\int_z = \int d^2z/\pi$ , と  $\partial = \partial/\partial z$ ,  $\partial_* = \partial/\partial z^*$ , を導入した。パラメータ  $s = \nu - \mu$  は, 演算子の並び順を示す量である。たとえば,  $s = 1$  は正規順,  $s = -1$  は反正規順を, また,  $s = 0$  は Weyl 順に対応している。式 (151) より, 熱空間と位相空間の間の対応:

$$(\mu a + \nu \tilde{a}^\dagger)|0_f(t)\rangle \longleftrightarrow zP_f^{(\mu,\nu)}(z,t), \quad (a - \tilde{a}^\dagger)|0_f(t)\rangle \longleftrightarrow \partial_*P_f^{(\mu,\nu)}(z,t), \quad (155)$$

が見て取れる。tilde 不変  $|0_f(t)\rangle^\sim = |0_f(t)\rangle$  は,

$$P_f^{(\mu,\nu)}(z,t)^* = P_f^{(\mu,\nu)}(z,t), \quad (156)$$

となる。なお,  $a - \tilde{a}^\dagger$  と  $\mu\tilde{a} + \nu a^\dagger$  は正準共役演算子であり, 正準交換関係

$$[a - \tilde{a}^\dagger, \mu\tilde{a} + \nu a^\dagger] = 1, \quad (157)$$

を満たす。

2. 熱空間の演算子  $G(a, a^\dagger, \tilde{a}^\dagger, \tilde{a})$  に対応した位相空間の関数  $G^{(\mu,\nu)}(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*)$  は,

$$G(a, a^\dagger, \tilde{a}^\dagger, \tilde{a}) = \int_{z_1} \int_{z_2} G^{(\mu,\nu)}(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*) \Delta^{(\mu,\nu)}(z_1) \tilde{\Delta}^{(\mu,\nu)}(z_2), \quad (158)$$

で定義される。ただし,

$$\Delta^{(\mu,\nu)}(z) = \int_\alpha e^{s|\alpha|^2/2} e^{z\alpha^* - z^*\alpha} D(\alpha), \quad D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}, \quad (159)$$

である。これより, 状態

$$G(a, a^\dagger, \tilde{a}^\dagger, \tilde{a})|0_f(t)\rangle = \int_z F^{(\mu,\nu)}(z, z^*, t) |\Delta^{(\mu,\nu)}(z)\rangle, \quad (160)$$

に対しては,

$$F^{(\mu,\nu)}(z, z^*, t) = e^{\nu \partial^1 \partial_*^2 - \mu \partial_*^1 \partial^2} \times G^{(\mu,\nu)}(z_1 + \nu \partial_*, z_1^* - \mu \partial, z_2 - \mu \partial_*, z_2^* + \nu \partial) P_f^{(\mu,\nu)}(z, t) \Big|_{\substack{z_1 = z_2 = z \\ z_1^* = z_2^* = z^*}} \quad (161)$$

となることが分る。

### 3. オブザーバブル演算子

$$G(a, a^\dagger) = \int_z F^{(\mu,\nu)}(z, z^*) \Delta^{(\mu,\nu)}(z), \quad (162)$$

の期待値は,

$$\langle 1 | G(a, a^\dagger) | 0_f(t) \rangle = \int_z F^{(\nu,\mu)}(z, z^*) P_f^{(\mu,\nu)}(z, t), \quad (163)$$

で与えられる。

### 4. 揺動力演算子 $dW(t)$ , $d\tilde{W}(t)$ についての熱空間と位相空間の対応 (写像) は,

$$dW(t) \longleftrightarrow dW(t), \quad d\tilde{W}(t) \longleftrightarrow dW^*(t), \quad (164)$$

で与えられるものとする。これらの揺動力の位相空間における確率過程は, (125)–(128) で与えられる。ただし, 対応 (164) に従って, 演算子を c 数関数に置き換えている。つまり,

$$\langle dW(t) \rangle = \langle dW^*(t) \rangle = 0, \quad (165)$$

$$\langle dW(t) dW(s) \rangle = \langle dW^*(t) dW^*(s) \rangle = 0, \quad (166)$$

$$\langle dW(t) dW^*(s) \rangle = 2\kappa(\bar{n} + \nu) \delta(t - s) dt ds. \quad (167)$$

## 9 位相空間法

粗視化された演算子に対するコヒーレント状態表現 (式 (151)–(163) と同様の手続きにより,  $|0(t)\rangle$  と  $P^{(\mu,\nu)}(z, t)$  の対応を付けて得られる) によって, 量子 Fokker-Planck 方程式 (135) を位相空間の式に写像すると, 位相空間での Fokker-Planck 方程式として [33]

$$\frac{d}{dt} P^{(\mu,\nu)}(z, t) = -i\Omega^{(\mu,\nu)}(z) P^{(\mu,\nu)}(z, t), \quad (168)$$

を得る。ただし,

$$P^{(\mu,\nu)}(z, t) = \langle P_f^{(\mu,\nu)}(z, t) \rangle, \quad (169)$$

であり, 粗視化された時間発展演算子

$$\Omega^{(\mu,\nu)}(z) = (-\partial z + \partial_* z^*) \hat{E}^{(\mu,\nu)}(z, \partial) + i\kappa(\partial z + \partial_* z^*) + i2\kappa(\bar{n} + \nu) \partial \partial_*, \quad (170)$$

を導入した。  $\mu = 1, \nu = 0$  のとき, 表式 (168) は, Fokker-Planck 方程式 (64) と一致する。なお, 後者は, Liouville 空間でのコヒーレント表現を利用し, 密度演算子法におけるマスター方程式 (53) を写像して得た表式である (たとえば, [16] を参照せよ)。

Stratonovich 型の量子確率 Liouville 方程式 (130) は,

$$dP_f^{(\mu,\nu)}(z,t) = -i\Omega_f^{(\mu,\nu)}(z,t)dt \circ P_f^{(\mu,\nu)}(z,t), \quad (171)$$

と写像される [33]。確率的時間発展演算子は,  $\hat{H}_{f,t}dt$  を写像して得られる

$$\begin{aligned} \Omega_f^{(\mu,\nu)}(z,t)dt &= (-\partial z + \partial_* z^*) \hat{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)dt \\ &\quad + i\kappa(\partial z + \partial_* z^*)dt - i[\partial \circ dW(t) + \partial_* \circ dW^*(t)], \end{aligned} \quad (172)$$

である。ただし,  $(-\partial z + \partial_* z^*)\hat{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)$  は, (160), (161) によって  $\hat{H}_S$  と関連する部分である。ただし, 性質

$$-z\hat{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)\partial + z^*\hat{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)\partial_* = (-\partial z + \partial_* z^*)\hat{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial), \quad (173)$$

を用いた。ここでは,  $H_S$  が  $\sum_n g_n(a^\dagger)^n a^n$  なる構造を持つ場合に話を限っている。この場合,

$$\hat{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial) = \sum_{\substack{p,q,m,n \\ p+q=m+n}} g_{p,q,m,n} [z^p (z^*)^q \partial^m \partial_*^n + (z^*)^p z^q \partial^m \partial_*^n], \quad (174)$$

である。ただし, パラメータ  $g_{p,q,m,n}$  は, 実数である。角振動数が  $\omega$  の調和振動子の場合は,  $\hat{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial) = \omega$  である。

伊藤型の量子確率 Liouville 方程式 (123) は, 位相空間に写像されると

$$dP_f^{(\mu,\nu)}(z,t) = -i\Omega_f^{(\mu,\nu)}(z,t)dt P_f^{(\mu,\nu)}(z,t), \quad (175)$$

となる。ただし,

$$\Omega_f^{(\mu,\nu)}(z,t)dt = \Omega^{(\mu,\nu)}(z)dt - i[\partial dW(t) + \partial_* dW^*(t)], \quad (176)$$

である。(175) の乱雑平均を採ると, Fokker-Planck 方程式 (168) となることは, 容易に見て取れる。

Stratonovich 型の量子 Langevin 方程式 (139) は,

$$\begin{aligned} dA^{(\nu,\mu)}(t) &= i \left[ -\check{E}^{(\mu,\nu)}(z(t), \partial(t)) z(t) \partial(t) + \check{E}^{(\mu,\nu)}(z(t), \partial(t)) z^*(t) \partial_*(t) \right] A^{(\nu,\mu)}(t) dt \\ &\quad - \kappa [z(t) \partial(t) + z^*(t) \partial_*(t)] A^{(\nu,\mu)}(t) dt \\ &\quad + \left\{ [\partial(t) A^{(\nu,\mu)}(t)] \circ dW(t) + [\partial_*(t) A^{(\nu,\mu)}(t)] \circ dW^*(t) \right\}, \end{aligned} \quad (177)$$

のように写像される [33]。簡略のため,  $\partial(t) = \partial/\partial z(t)$  や  $\partial_*(t) = \partial/\partial z^*(t)$  の記法を導入した。また,  $\check{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)$  は,

$$\begin{aligned} &\int_z f_1(z) \left[ -z\hat{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)\partial + z^*\hat{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)\partial_* \right] f_2(z) \\ &= \int_z f_2(z) \left[ \partial\check{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)z - \partial_*\check{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)z^* \right] f_1(z), \end{aligned} \quad (178)$$

で定義された「共役」微分演算子関数である。なお, 関係式

$$-\partial\check{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)z + \partial_*\check{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)z^* = -\check{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)z\partial + \check{E}^{(\mu,\nu)}(z,\partial)z^*\partial_*, \quad (179)$$

を用いている。

位相空間での伊藤積と Stratonovich 積の変換公式は量子確率演算子のものと同じ構造であるが、それを利用すると伊藤型の Langevin 方程式

$$\begin{aligned} dA^{(\nu,\mu)}(t) = & i \left[ -\check{E}^{(\mu,\nu)}(z(t), \partial(t)) z(t) \partial(t) + \check{E}^{(\mu,\nu)}(z(t), \partial(t)) z^*(t) \partial_*(t) \right] A^{(\nu,\mu)}(t) dt \\ & - \kappa [z(t) \partial(t) + z^*(t) \partial_*(t)] A^{(\nu,\mu)}(t) dt + 2\kappa(\bar{n} + \nu) \partial(t) \partial_*(t) A^{(\nu,\mu)}(t) dt \\ & + \left\{ [\partial(t) A^{(\nu,\mu)}(t)] dW(t) + [\partial_*(t) A^{(\nu,\mu)}(t)] dW^*(t) \right\}, \end{aligned} \quad (180)$$

が得られる。これは、伊藤型の量子 Langevin 方程式 (145) を、位相空間に写像することによっても得られる。

(177) あるいは (180) を  $z(t)$  に適用すると、

$$dz(t) = -i\check{E}^{(\mu,\nu)}(z(t), \partial(t)) z(t) dt - \kappa z(t) dt + dW(t), \quad (181)$$

を得る。表式 (181) を利用すると、(180) は、

$$dA^{(\nu,\mu)}(t) = dz(t) \partial(t) A^{(\nu,\mu)}(t) + dz^*(t) \partial_*(t) A^{(\nu,\mu)}(t) + dz(t) dz^*(t) \partial(t) \partial_*(t) A^{(\nu,\mu)}(t), \quad (182)$$

とまとめられる。ただし、関係式

$$dz(t) dz^*(t) = dW(t) dW^*(t) = 2\kappa(\bar{n} + \nu) dt, \quad (183)$$

を用いた。これは、確率収束の下に、(181) と相関 (165)–(167) を用いると証明できる。表式 (182) は、複素確率変数  $z(t)$  に対する伊藤公式に他ならない。

なお、流れの定義：

$$dz_t = -i\check{E}^{(\mu,\nu)}(z, \partial) z dt - \kappa z dt + dW(t), \quad (184)$$

((181) と同じ構造である) を用いると、確率的時間発展演算子 (172) は、

$$\begin{aligned} \Omega_f^{(\mu,\nu)}(z, t) dt = & -i (\partial dz_t + \partial_* dz_t^*) \\ & - \check{E}^{(\mu,\nu)}(z, \partial) (-\partial z + \partial_* z^*) dt + (-\partial z + \partial_* z^*) \hat{E}^{(\mu,\nu)}(z, \partial) dt, \end{aligned} \quad (185)$$

と表される [33]。右辺の第 2 項と第 3 項は、量子効果を表している。これは、確率 Liouville 方程式に現れる久保の時間発展微分演算子 [6] の、量子系への拡張となっている。

初期分布関数  $P_f^{(\mu,\nu)}(z)$  と揺動力に関して (180) の平均を採ると、注目系の任意のオペレータ演算子  $A(t)$  の運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A(t) \rangle = & \left\langle \int_z A^{(\nu,\mu)}(z) \left[ -i(-\partial z + \partial_* z^*) \hat{E}^{(\mu,\nu)}(z, \partial) \right. \right. \\ & \left. \left. + \kappa(\partial z + \partial_* z^*) + 2\kappa(\bar{n} + \nu) \partial \partial_* \right] P_f^{(\mu,\nu)}(z, t) \right\rangle \\ = & \int_z A^{(\nu,\mu)}(z) \left[ -i(-\partial z + \partial_* z^*) \hat{E}^{(\mu,\nu)}(z, \partial) \right. \\ & \left. + \kappa(\partial z + \partial_* z^*) + 2\kappa(\bar{n} + \nu) \partial \partial_* \right] P^{(\mu,\nu)}(z, t), \end{aligned} \quad (186)$$

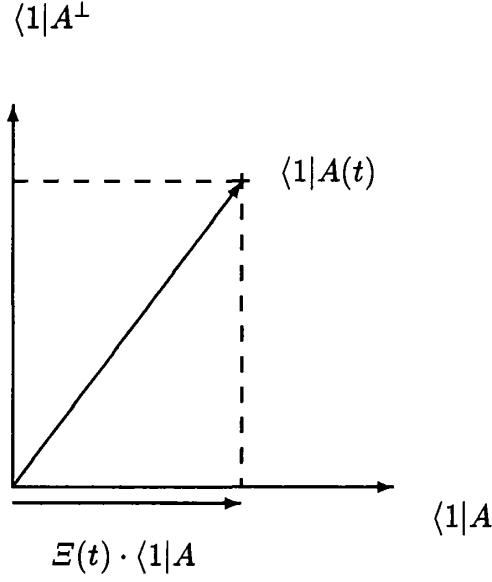


Figure 1: ブラ・ベクトル状態  $\langle 1|A(t)$  の熱空間を、2つの部分空間  $\langle 1|A$  と  $\langle 1|A^\perp$  に分解する概念図。

を得る。ただし、

$$\langle\langle A(t) \rangle\rangle = \left\langle \int_z A^{(\nu,\mu)}(z) P_f^{(\mu,\nu)}(z, t) \right\rangle = \int_z A^{(\nu,\mu)}(z) P^{(\mu,\nu)}(z, t), \quad (187)$$

である ((163) を見よ)。ここで、伊藤積の性質 [30]

$$\langle z(t) dW(t) \rangle = 0, \quad \text{etc.}, \quad (188)$$

を用いた。(186) の2番目の表式を見ると分るように、平均値に対する運動方程式は、Fokker-Planck 方程式 (168) を利用して導き出すこともできる。

量子 Fokker-Planck 方程式や量子確率微分方程式を系統的に包含した NETFD の枠組みが、古典系の Fokker-Planck 方程式や確率微分方程式の枠組みと無矛盾であることを示した。これは、熱空間における位相空間法を利用して、NETFD の全体の枠組みを c 数位相空間に写像することにより為された [32]。なお、位相空間に写像した枠組みは、量子効果の情報を完全に保持している。量子散逸場の正準理論において、量子確率微分方程式の定式化にも成功したことは、Schrödinger 方程式やそれと同等のレベルでの同様の試み [13]-[15],[31],[38]-[43] に対して、何らかの教訓を与えるだろう。

## 10 森公式の解釈



粗視変数に対応した演算子の組,  $\{A_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$  で作った列ベクトル

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{pmatrix}, \quad (189)$$

を考えよう。これは, NETFD における Heisenberg 方程式

$$\frac{d}{dt}A(t) = i[\hat{H}, A(t)], \quad (190)$$

を満たす。ただし, 山付ハミルトニアンは, ブラ真空を消す:

$$\langle 1|\hat{H} = 0. \quad (191)$$

なお, Heisenberg 方程式は,

$$A(t) = e^{i\hat{H}t} A e^{-i\hat{H}t}, \quad (192)$$

のように, 形式的に解ける。

熱空間中のブラ・ベクトル  $\langle 1|A(t)$  を, 2つの部分空間の成分に分解しよう (図1を見よ)。1つは  $\{\langle 1|A_i (i = 1, 2, \dots, n)\}$  で張られる空間, もう1つはそれと直交する空間である。後者の空間を,  $\langle 1|A^\perp$  で表すことにしよう。さて, ブラ・ベクトル  $\langle 1|A$  で張られた部分空間への射影演算子

$$P = A^\dagger|0\rangle \cdot \langle 1|AA^\dagger|0\rangle^{-1} \cdot \langle 1|A, \quad (193)$$

を導入する。以下では, ケット真空  $|0\rangle$  が,

$$\hat{H}|0\rangle = 0, \quad (194)$$

を満たすものと仮定する。

ケット・ベクトル  $\langle 1|A(t)$  の満たす運動方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle 1|A(t) &= i\langle 1|[\hat{H}, A(t)] \\ &= -i\langle 1|A(t)\hat{H} \\ &= -i\langle 1|A\hat{H}e^{-i\hat{H}t} \\ &= i\langle 1|[\hat{H}, A]e^{-i\hat{H}t} \\ &= \langle 1|\dot{A}e^{-i\hat{H}t} \\ &= i\Omega\langle 1|A(t) + \langle 1|F(t), \end{aligned} \quad (195)$$

と変形できる。ここで,

$$F(t) = e^{i\hat{H}t} F e^{-i\hat{H}t}, \quad (196)$$

なる量を導入した。ただし,

$$F = \dot{A} - i\Omega A, \quad \dot{A} = i[\hat{H}, A], \quad (197)$$

$$i\Omega = \langle 1|\dot{A}A^\dagger|0\rangle \cdot \langle 1|AA^\dagger|0\rangle^{-1}, \quad (198)$$

である。表式 (195) を導く際に, (191) を用いた。\$F\$ が

$$\langle 1|FA^\dagger|0\rangle = 0, \quad (199)$$

を満たしていることは, 容易に分る。

ここで,

$$R(t) = e^{i\hat{H}t(1-P)}R(0)e^{-i\hat{H}t(1-P)}, \quad (200)$$

なる量を導入しよう。ただし,

$$R(0) = F, \quad (201)$$

である。さて,

$$\langle 1|X(1-P)A^\dagger|0\rangle = 0, \quad (202)$$

なので,

$$\langle 1|R(t)A^\dagger|0\rangle = 0, \quad (203)$$

が分る。これは, ベクトル \$\langle 1|R(t)\$ が, 部分空間 \$\langle 1|A^\perp\$ に属していることを示している。公式

$$e^{-i\hat{H}t(1-P)} = e^{-\hat{H}t} + \int_0^\infty ds e^{i\hat{H}(s-t)(1-P)} i\hat{H}P e^{-i\hat{H}s}, \quad (204)$$

を利用すると, ケット・ベクトル \$\langle 1|R(t)\$ と \$\langle 1|F(t)\$ の関係:

$$\langle 1|R(t) = \langle 1|F(t) + \int_0^\infty ds \Gamma(t-s) \langle 1|A(s), \quad (205)$$

が得られる。ただし,

$$\Gamma(t) = \langle 1|R(t)R^\dagger(0)|0\rangle \cdot \langle 1|AA^\dagger|0\rangle^{-1}, \quad (206)$$

を定義して用いた。表式 (205) を導く際, (191), (194) を用いた。

式 (205) を (195) に代入すると,

$$\frac{d}{dt} \langle 1|A(t) = i\Omega \langle 1|A(t) - \int_0^\infty ds \Gamma(t-s) \langle 1|A(s) + \langle 1|R(t), \quad (207)$$

が得られる。ただし, \$i\Omega\$, \$\Gamma(t)\$ は, それぞれ (198), (206) で定義される。なお, \$R(t)\$ は, 直交性 (203) を満たす。表式 (207) は, 森公式 [44] と密接な関係にあり, そのもっともな解釈を与えるものと考えられる。

ベクトル \$\langle 1|R(t)\$ と \$A^\dagger|0\$ の直交性 (203) を用いると, 相関行列

$$\Xi(t) = \langle 1|A(t)A^\dagger|0\rangle \cdot \langle 1|AA^\dagger|0\rangle^{-1}, \quad (208)$$

に対する運動方程式

$$\frac{d}{dt} \Xi(t) = i\Omega \Xi(t) + \int_0^\infty ds \Gamma(t-s) \Xi(s), \quad (209)$$

を得る。\$i\Omega\$ は, \$\Xi(t)\$ と

$$i\Omega = \left. \frac{d}{dt} \Xi(t) \right|_{t=0}, \quad (210)$$

の関係にある。なお,

$$\langle 1|A(t)|0\rangle = \langle 1|A|0\rangle, \quad (211)$$

((191) および (194) を見よ) であるから,  $\langle 1|A|0\rangle = 0$  と置くことにより, 一般性を損なうことなく  $\Xi(t)$  を 2 次キュムラントにできる。

ケット・ベクトル状態に対する「Langevin 方程式」(207) は, 機装 Hilbert 空間 (rigged Hilbert space) の意味で興味深い。そこでは, ブラ・ベクトル状態の属する空間は, 観測可能状態だけの組で張られた空間 (ケット真空  $|0\rangle$  の上に生成されたもの) に共役な空間である。この共役空間は, 観測可能状態で張られた空間より広く, 従って, 部分空間  $\langle 1|A^\perp$  は, バラエティーに富んでいる。この豊富さが, 「普通の微分から確率微分へのジャンプが, いつ為されたか?」という森公式の解釈に纏わる問題に, 解答を与えるものと期待される。この点の詳しい内容は, 別の機会に発表する。

## 11 母汎関数法

ここでは, NETFD における母汎関数法を紹介する。これによって, NETFD と散逸系を扱う他の方法との関連が明らかになるであろう。

Fokker-Planck 方程式 [34]

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -i\hat{H}_{tot}|0(t)\rangle, \quad (212)$$

を考えよう。ただし,

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H} + \hat{H}_{I,t}, \quad (213)$$

である。ここに,  $\hat{H}$  は Fokker-Planck 方程式 (75) の山付ハミルトニアンであり,  $\hat{H}_{I,t}$  は,

$$\hat{H}_{I,t} = \bar{K}(t)^\mu a^\mu + \bar{a}^\mu K(t)^\mu = \bar{K}_\gamma(t)^\mu \gamma^\mu + \bar{\gamma}^\mu K_\gamma(t)^\mu, \quad (214)$$

で定義されるものとする。c 数外場に関する熱 2 重項  $K(t)^{\mu=1} = K(t)$ ,  $K(t)^{\mu=2} = \bar{K}^*(t)$  と  $\bar{K}(t)^{\mu=1} = K(t)^*$ ,  $\bar{K}(t)^{\mu=2} = -\bar{K}(t)$  を導入した。 $K_\gamma(t)$  と  $K(t)$  は,

$$K_\gamma(t)^\mu = B(t)^{\mu\nu} K(t)^\nu, \quad \bar{K}_\gamma(t) = \bar{K}(t)^\nu B^{-1}(t)^{\nu\mu}, \quad (215)$$

で結ばれている。ただし,  $B(t)^{\mu\nu}$  は, (82) で定義されている。

この系の母汎関数は,

$$Z[K, \bar{K}] = \langle 1|\hat{U}(t)|0\rangle, \quad (216)$$

で定義される [34]。ただし,  $\hat{U}(t)$  は,

$$\frac{d}{dt}\hat{U}(t) = -i\hat{H}_I(t)\hat{U}(t), \quad (217)$$

を満たす。初期条件は,  $\hat{U}(0) = 1$  である。山付ハミルトニアン  $\hat{H}_I(t)$  は,

$$\hat{H}_I(t) = \hat{S}^{-1}(t)\hat{H}_{I,t}\hat{S}(t), \quad (218)$$

で与えられる。

母汎関数 (216) の汎関数微分を採ると,

$$\delta \ln Z[K, \bar{K}] = -i \int_0^t dt \left[ \delta \bar{K}_\gamma(t)^\mu \langle \gamma(t)^\mu \rangle + \langle \bar{\gamma}(t)^\mu \rangle \delta K_\gamma(t)^\mu \right], \quad (219)$$

が得られる。ただし、 $\langle \gamma(t)^\mu \rangle$  と  $\langle \bar{\gamma}(t)^\mu \rangle$  は、

$$\langle \gamma(t)^\mu \rangle = i \frac{\delta}{\delta \bar{K}_\gamma(t)^\mu} \ln Z[K, \bar{K}] = \langle 1 | T [\hat{U}(\bar{t}) \gamma(t)^\mu] | 0 \rangle, \quad (220)$$

$$\langle \bar{\gamma}(t)^\mu \rangle = i \frac{\delta}{\delta K_\gamma(t)^\mu} \ln Z[K, \bar{K}] = \langle 1 | T [\hat{U}(\bar{t}) \bar{\gamma}(t)^\mu] | 0 \rangle, \quad (221)$$

で定義した。 $\langle \gamma(t)^\mu \rangle$  に対する運動方程式：

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma(t)^\mu \rangle = -(i\omega \delta^{\mu\nu} + \kappa \tau_3^{\mu\nu}) \langle \gamma(t)^\nu \rangle - iK_\gamma(t)^\mu, \quad (222)$$

は、境界条件

$$\begin{aligned} \langle \gamma(0)^{\mu=1} \rangle &= \langle \gamma(0) \rangle = 0, & \langle \gamma(\bar{t})^{\mu=2} \rangle &= \langle \bar{\gamma}^\dagger(\bar{t}) \rangle = 0, \\ \langle \bar{\gamma}(\bar{t})^{\mu=1} \rangle &= \langle \gamma^\dagger(\bar{t}) \rangle = 0, & \langle \bar{\gamma}(0)^{\mu=2} \rangle &= -\langle \bar{\gamma}(0) \rangle = 0, \end{aligned} \quad (223)$$

の下に解けて、

$$\langle \gamma(t)^\mu \rangle = \int_0^{\bar{t}} dt' \mathcal{G}(t, t')^{\mu\nu} K_\gamma(t')^\nu, \quad (224)$$

となる [34]。ただし、 $\mathcal{G}(t, t')^{\mu\nu}$  は、(93) で与えられる。境界条件 (223) は、熱状態条件 (91) から導かれる。なお、行列  $\tau_3^{\mu\nu}$  は、 $\tau_3^{11} = -\tau_3^{22} = 1$ ,  $\tau_3^{12} = \tau_3^{21} = 0$  で定義した。

表式 (224) を (219) に代入すると、最終的に

$$\begin{aligned} Z[K, \bar{K}] &= \exp \left[ -i \int_0^{\bar{t}} dt \int_0^{\bar{t}} dt' \bar{K}_\gamma(t)^\mu \mathcal{G}(t, t')^{\mu\nu} K_\gamma(t')^\nu \right] \\ &= \exp \left[ -i \int_0^{\bar{t}} dt \int_0^{\bar{t}} dt' \bar{K}(t)^\mu G(t, t')^{\mu\nu} K(t')^\nu \right], \end{aligned} \quad (225)$$

を得る [34]。開放系に対するこの表式は、Schwinger が閉時間経路法 (closed-time path method) [35] によって初めて導出したものである ([36, 37] も参照のこと)。

この節で示した母汎関数の導出によって、散逸場に対する量子演算子法と経路積分法との関係が明らかになった。なお、NETFD が建設されるまでは、量子散逸場の正準理論が可能であることは、知られていなかった。

## 12 結び

図 2 に、この講演で扱った理論体系の構造を載せた。Langevin 方程式と確率 Liouville 方程式の関係は、量子力学や場の量子論における Heisenberg 方程式と Schrödinger 方程式との関係と同じである。確率微分方程式には、伊藤型と Stratonovich 型の 2 種類の積 (確率積) がある。Stratonovich 型の Langevin 方程式 (138) は、通常の Heisenberg 運動方程式と同じ構造をしている。一方、伊藤型 (144) には、確率微分の違いによる  $dW(t)d\bar{W}(t)$  に比例した余分な項が現れる。伊藤型 (123), Stratonovich 型 (130) 共に、確率 Liouville 方程式は同じ形をしているが、乱雑平均を採って対応した Fokker-Planck 方程式 (135) を得るには、前者の方が便利である。これは、伊藤積のお陰である。

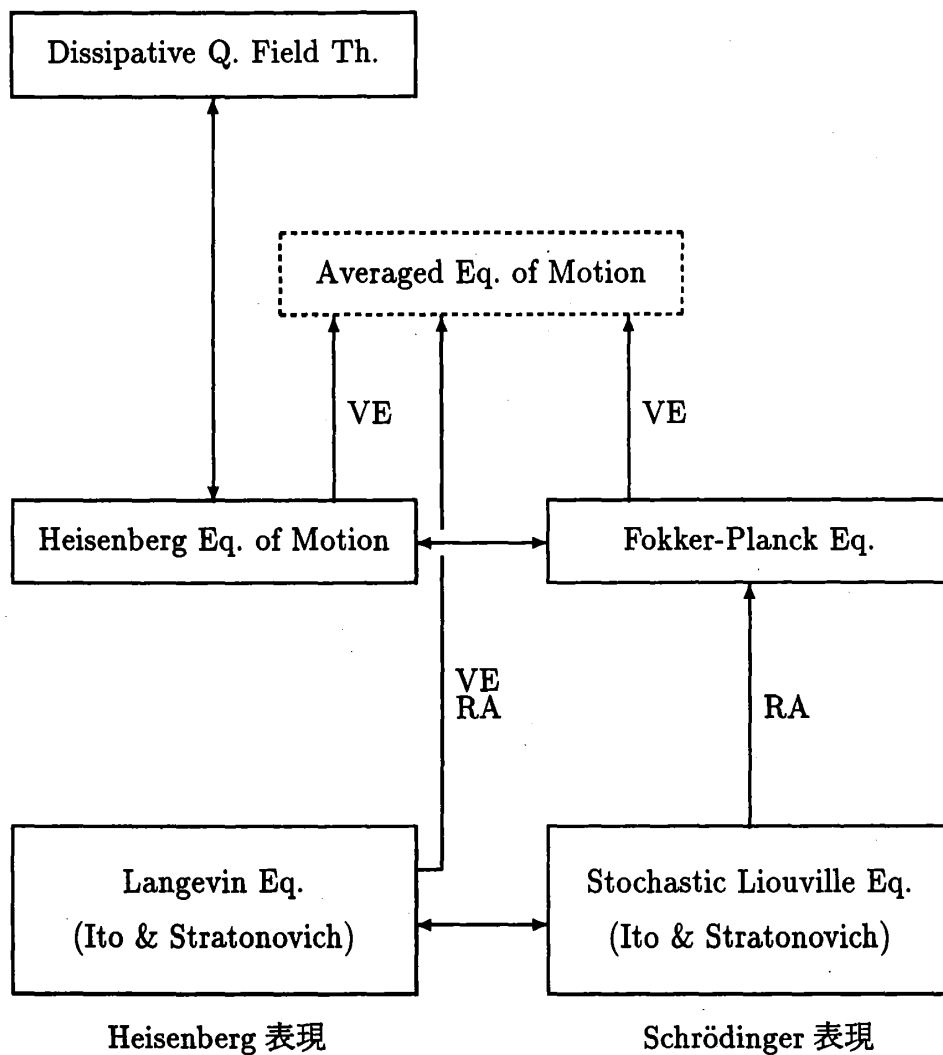


Figure 2: 理論体系の構造。RA は乱雑平均を表し，VE は真空期待値を表す。

乱雑平均と真空期待値を採った物理量の運動方程式を得るには、2つの方法がある。一つは、Langevin 方程式の乱雑平均と真空期待値を採る方法で、もう一つは、Fokker-Planck 方程式を利用して物理量に対応した演算子の真空期待値を採る方法である。

Fokker-Planck 方程式 (135) に付随する山付ハミルトニアン  $\hat{H}_S$  を用いると、粗視化された演算子に対する Heisenberg 方程式が得られる。粗視化された演算子の Heisenberg 運動方程式があるお陰で、散逸量子場に対する正準理論が建設できたのである。

一貫した量子正準理論全体を建設するにあたって、確率 Liouville 方程式の発見が本質的であった。

この一貫した体系により、量子確率微分方程式に纏わる問題点は、解消された。(98) から分るように、疑問 Q1 は、解決した。疑問 Q2 と Q3 は、可換性 (128) のお陰で解消した (小節 7.1 の終わりにある議論を見よ)。疑問 Q4 は、数学者によって解決された [40]-[43]。臙装 Hilbert 空間との関わりを踏まえた森公式の解釈により、量子確率微分方程式に関する表現空間の認識は、さらに深められるであろう。

この講演を終わるにあたって、2, 3 のコメントを述べておきたい。ここで紹介した体系の、非定常量子 Wiener 過程への一般化も可能である [4]。Fermi 粒子やスピン系への拡張もできる。非白色量子過程にも、拡張可能である。これらの発展は、別の機会に報告する。量子確率微分方程式の数学的定式化 [43] を利用して、ここでの体系を公理的にまとめ直す試みも現在進行中である [45]。スピン系への応用は、文献 [46] との絡みで、たいへん興味深い。その詳しい話は、次回に行いたい。注目している系内の非線形相互作用が揺動力の相関に与える影響も、調べられた [47]。ここで紹介した NETFD の一貫した理論体系が、自然認識をさらに深めるような、新しい散逸場の量子論の扉を開けることを期待したい。

## 謝辞

1983 年に、筑波で NETFD の体系を創り始めて、ちょうど 10 年が過ぎた。この機会に、すべての共同研究者 (過去、現在の大学院生も含む) に心から感謝の気持ちを表したい。プロジェクトに参加してくれた順にお名前を挙げると、富永哲雄博士、番雅司博士、梅沢博臣博士、Dr. J. Pradko、高田裕司氏、須藤恭史博士、Dr. M. Guida、本池巧氏、岩崎富生博士、Dr. F.H. Willeboordse、斎藤健氏、有光直子博士の方々である。梅沢博士の共同研究者で、ここにお名前を挙げなかったが NETFD の発展に大いに協力してくださった方々にも深く感謝したい。

## References

- [1] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 429.
- [2] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32.
- [3] T. Arimitsu, Phys. Lett. **A153** (1991) 163.
- [4] T. Arimitsu, 物性若手夏の学校講義録 (1993) [物性研究 **60** (1993) 491 に掲載. 英文.] .
- [5] R. Kubo, J. Math. Phys. **4** (1963) 174.
- [6] R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II* (Springer, Berlin 1985).
- [7] H. Umezawa, H. Matsumoto and M. Tachiki, *Thermo Field Dynamics and Condensed States* (North-Holland 1982).
- [8] D. N. Zubarev and M. V. Tokarchuk, Theor. Math. Phys. **88** (1991) 876.

- [9] T. Arimitsu, 数理科学, 6月号 (1990) 22.
- [10] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **26** Suppl. (1969) 1.
- [11] R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan **12** (1957) 570.
- [12] P. C. Martin and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **115** (1959) 1342.
- [13] I. R. Senitzky, *Phys. Rev.* **119** (1960) 670.
- [14] M. Lax, *Phys. Rev.* **145** (1966) 110.
- [15] H. Haken, *Optics. Handbuch der Physik* vol. XXV/2c (1970), [*Laser Theory* (Springer, Berlin, 1984)], and the references therein.
- [16] F. Haake, *Springer Tracts in Modern Physics*, vol. 66 (Springer-Verlag, 1973) 98.
- [17] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 277.
- [18] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131** (1963) 2766.
- [19] G. S. Agarwal and E. Wolf, *Phys. Rev. D* **2** (1970) 2161, 2187 and 2206.
- [20] T. Arimitsu and H. Umezawa, *Prog. Theor. Phys.* **77** (1987) 53.
- [21] J. A. Crawford, *Nuovo Cim.* **10** (1958) 698.
- [22] M. Schmutz, *Z. Phys. B* **30** (1978) 97.
- [23] T. Arimitsu, Y. Sudo and H. Umezawa, *Physica A* **146** (1987) 433.
- [24] T. Arimitsu, M. Guida and H. Umezawa, *Europhys. Lett.* **3** (1987) 277.
- [25] T. Arimitsu, M. Guida and H. Umezawa, *Physica A* **148** (1988) 1.
- [26] T. Arimitsu and N. Arimitsu, *Time-Resolved Optical Spectrum for Transient Resonant Light Scattering* *Phys. Rev. E* (1994) in press.
- [27] T. Saito and T. Arimitsu, *Quantum Stochastic Liouville Equation of Ito Type*, *Modern Phys. Lett. B* (1993) in press.
- [28] T. Saito and T. Arimitsu, *Modern Phys. Lett. B* **6** (1992) 1319.
- [29] R. Stratonovich, *J. SIAM Control* **4** (1966) 362.
- [30] K. Ito, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20** (1944) 519.
- [31] C. W. Gardiner and M. J. Collett, *Phys. Rev. A* **31** (1985) 3761.
- [32] T. Arimitsu (1993) in preparation to submit.
- [33] T. Arimitsu and T. Saito, *Quantum Stochastic Differential Equations in Phase-Space Methods* (1993) submitted.
- [34] T. Arimitsu, J. Pradko and H. Umezawa, *Physica A* **135** (1986) 487.
- [35] J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 407.
- [36] L. V. Keldysh, *Sov. Phys. JETP* **20** (1965) 1018.
- [37] K. Chou, Z. Su, B. Hao and L. Yu, *Phys. Rep.* **118** (1985) 1.
- [38] R. F. Streater, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** (1982) 1477.
- [39] H. Hasegawa, J. R. Klauder and M. Lakshmanan, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** (1985) L123.
- [40] R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, *Commun. Math. Phys.* **83** (1984) 301.
- [41] R. L. Hudson and J. M. Lindsay, *Ann. Inst. H. Poincaré* **43** (1985) 133.
- [42] K. R. Parthasarathy, *Rev. Math. Phys.* **1** (1989) 89.

- [43] L. Accardi, Rev. Math. Phys. **2** (1990) 127.
- [44] H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33** (1965) 423.
- [45] T. Arimitsu and T. Saito, *General Structure of the Time-Resolved Generator for Quantum Stochastic Liouville Equation* (1994) in preparation to submit.
- [46] F. Shibata and N. Hashitsume, Phys. Soc. Japan **44** (1978) 1435.
- [47] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **9** (1993) 623.